

様々な推定方法によるバリュー・アット・リスクの比較分析

関西学院大学大学院 理工学研究科
数理科学専攻 森本研究室 鞠谷陽介

本研究ではファイナンスにおける定量的なリスク管理の指標の1つであるバリュー・アット・リスク (Value at Risk, 以下 VaR) の統計的推定手法に対する比較分析を行った。統計的な推定手法にはパラメトリック推定とノンパラメトリック推定がある。パラメトリック推定は分布にある仮定を置く推定手法で、ノンパラメトリック推定はそういった仮定を置かない推定手法である。本研究で比較した手法はパラメトリック推定としてデルタ法、モンテカルロ法、ノンパラメトリック推定としてヒストリカル法、ブートストラップ法という代表的な方法で4つの手法に加え、今回提案した推定方法として、ノンパラメトリック推定の1つであるカーネル密度推定法によって密度関数を推定した後、VaR を推定する方法である。

まず、VaR について説明する。分析者は株式のように毎日不確定に価格が変わるようなリスク資産を1単位保有しており、その変動に関心があると仮定する。価格変動(収益率)は確率変数であると仮定する。収益率にはある確率密度関数が存在すると考えるならば、そこには密度関数及び分布関数が存在する。VaR を統計的手法で推定する場合、分布関数 $F(x) = \alpha \in (0, 1)$ となる分位点を指す。言い換えると、密度関数 $f(x)$ に対して

$$\alpha = \int_{-\infty}^{\text{VaR}} f(x) dx$$

で表すことが出来る。

図1はある密度関数と $\alpha = 5\%$ としての VaR を表している。破線が VaR の値を示している。

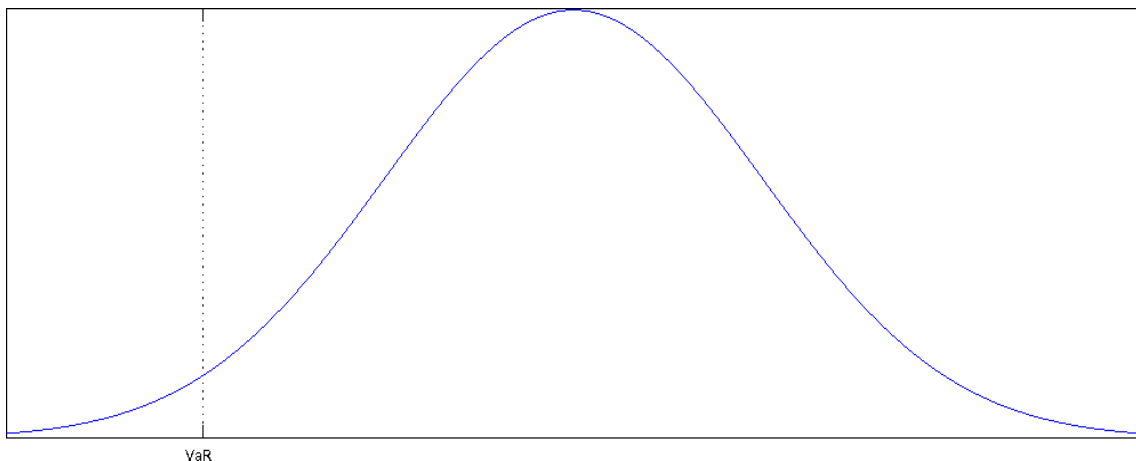


図1: $\alpha = 5\%$ のときの VaR

次に、カーネル密度推定法について説明する。カーネル密度推定法から VaR を推定する方法は、VaR の定義より、まず与えられたデータを基にカーネル密度推定法によって密度関数を推定

する．その推定密度関数 $\hat{f}(x)$ を積分することで VaR を推定することができる．ここでは $\hat{f}(x)$ の求め方のみ説明する． n 個のデータの集合 $\{x_1, \dots, x_n\}$ より，このデータに対する密度関数は以下の式で推定することが出来る．

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{nh} \sum_{j=1}^n K\left(\frac{x - x_j}{h}\right), \quad x \in \mathbb{R}$$

ただし， $K(\cdot)$ はカーネル関数， h はバンド幅である．

カーネル関数は以下の 3 つの条件を兼ね備えている関数である．

1. $\int_{-\infty}^{\infty} K(x)dx = 1$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} x^r K(x)dx = 0, \quad r = 1, \dots, p-1$
3. $\int_{-\infty}^{\infty} x^p K(x)dx > 0$

ただし， p は自然数の偶数である．このようなカーネル関数を p 階カーネルという．一般的には $p = 2$ のことが多いため，本発表においても $p = 2$ について言及していく．また，バンド幅の選択は平滑化パラメータともいい，この値が小さすぎると滑らかさに欠け，大きすぎると滑らかすぎて分布を捉えきれない．したがって，この求め方は密度関数を推定する上で非常に大きな問題となる．具体的には図 2 を見れば明らかであろう．図 2 の青線は標準正規分布の密度関数，赤線は推定密度関数を表している．

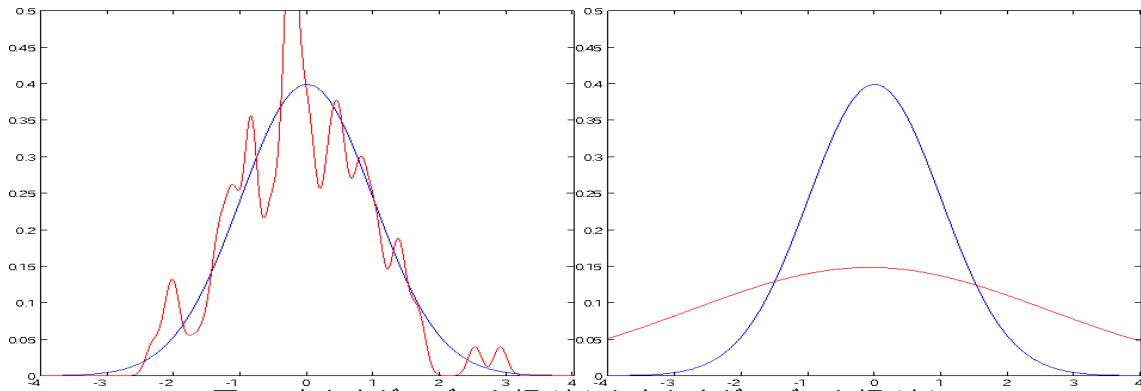


図 2：小さすぎるバンド幅 (左) と大きすぎるバンド幅 (右)

先行研究において提案されたバンド幅決定方法の内，ヒストグラムに由来して決める方法，頻度ポリゴンに由来して決める方法，そして，テラー級数を基に決めるシーザー・ジョーンズの方法を発表内で紹介する．

本発表においては，VaR がデータの値より大きくなる率 (超過率) の観点でどの方法が適切な VaR なのかを見ていく．また，分析の結果から得られた超過率は設定された超過率と比べて有意な差があるか，尤度比検定を用いて検定した．